Curso de Fotomultiplicadores de Silicio: fundamentos y aplicaciones

Ejercicios propuestos

Alumno:	**Elena Pastuschuk Estepa**
Número de ejercicios:	**6**
Fecha límite de entrega:	**11 de junio de 2013**

NOTA. Al final de estas hojas de problemas se incluye una tabla de constantes universales y una tabla de desarrollos en serie.

Ejercicio 1 (distribución de Bose-Einstein)

Demuestre que la distribución de Bose-Einstein (dada por la siguiente expresión) es una función densidad de probabilidad.

$$P(n) = \frac{1}{\mu+1} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu+1} \right)^n$$

Para ello verifique que se cumple: $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$

Demuestre también que el valor medio de esta distribución es **<n>** = μ. Para ello tenga en cuenta la definición del valor medio de una distribución de probabilidad discreta:

$$< n >= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n)$$

NOTAS. Pueden resultarle útiles los desarrollos en serie dados como anexo al final de estas hojas de problemas. Algún sumatorio puede simplificarse si emplea derivadas; usando la derivación, el interior del sumatorio puede quedar en una forma fácil de calcular.

Ejercicio 2 (velocidad de respuesta en un fotodiodo PIN)

Supongamos un fotodiodo PIN de InGaAs de alta velocidad con las siguientes características:

Ancho de la región intrínseca, **W**: 2 μm.

Área de detección, **A**: 100 μm x 100 μm.

Velocidad de saturación de los portadores, $\mathbf{v_{sat}}$: 10^5 m·s^{-1}.

Permitividad relativa del material, $\boldsymbol{\varepsilon_r}$: 12.

Resistor de carga, $\mathbf{R_L}$: 50 Ω.

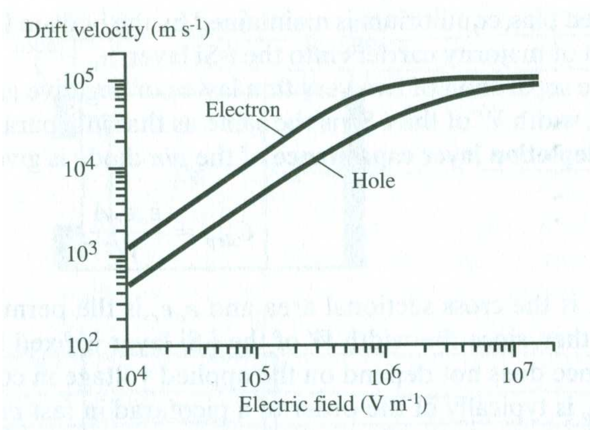
a) Calcule el tiempo de tránsito máximo de los portadores y el tiempo de respuesta global del dispositivo.
b) Determine el valor óptimo del resistor de sensado que minimiza el tiempo de respuesta del detector.
c) Obtenga el tiempo de respuesta óptimo del detector.
d) Cuantifique la mejora obtenida en relación con la respuesta en frecuencia del detector al haber reducido su tiempo de respuesta (esto es, evalúe cómo ha cambiado la frecuencia de operación máxima).
e) Obtenga una expresión para la mejora obtenida en la frecuencia máxima de operación en función de la mejora obtenida en el tiempo de respuesta y verifique su validez.

NOTA. Recuerde que la permitividad del vacío es $\boldsymbol{\varepsilon_o}$: $8.84\cdot10^{-12}$ F·m^{-1}.

Ejercicio 3 (Difusión en un fotodiodo PIN)

Considere un fotodiodo **p+** - **i** - **n+** en el que la región **p+** tiene una anchura de 1 μm y la región **i** de 20 μm. El voltaje de polarización inverso es de 120 V. Al fotodiodo llega un fotón de longitud de onda corta que se absorbe en la región **p+** dando lugar a un par electrón-hueco. El electrón fotogenerado llegará a la región intrínseca por un proceso de difusión y una vez allí será arrastrado por el campo eléctrico presente en dicha región. Considerando que el coeficiente de difusión de los electrones en la región **p+** es $\mathbf{D_e}$ = $3\cdot10^{-4}$ m^2·s^{-1}, ¿cuál será el tiempo de respuesta del dispositivo? Determine, si lo necesita, la velocidad de arrastre de los electrones en la región intrínseca mediante la figura siguiente. ¿Cuál es el factor limitante, en estas condiciones, en la velocidad de respuesta del detector? Justifique la respuesta.

NOTA. Para la determinación de los tiempos considere el peor escenario posible (i.e. el par e-h se ha generado en el lugar que da lugar a un tiempo de respuesta mayor).



Velocidad de desplazamiento de los portadores como función de la intensidad del campo eléctrico en una estructura PIN [Kasap-2001]

Ejercicio 4 (tiempo de respuesta en un fotodiodo APD)

Consideremos un APD de silicio con las siguientes características:

Anchura de la región de absorción, $\mathbf{w_d}$: 50 µm.

Anchura de la región de avalancha, $\mathbf{w_m}$: 0.5 µm.

Velocidad de los electrones, $\mathbf{v_e}$: 10^7 cm·s^{-1}.

Velocidad de los huecos, $\mathbf{v_h}$: 5·10^6 cm·s^{-1}.

Ganancia, **G**: 100.

Relación entre coeficientes de ionización, $\mathbf{k_r}$: 0.1.

a) Calcular el tiempo de avalancha (τ_m) y el tiempo total requerido para el proceso de fotodetección (τ) sin tener en cuenta que ambos tipos de portadores ionizan.

b) Obtener τ_m y τ de forma aproximada cuando sí se tiene en cuenta que ambos tipos de portadores ionizan. Comparar los resultados de ambos apartados.

NOTA. Tenga en cuenta las unidades en que se dan los datos del problema.

Ejercicio 5 (Responsividad en un APD)

Un APD de silicio presenta una eficiencia cuántica del 70 % al trabajar en ausencia de multiplicación y a una longitud de onda de 830 nm.

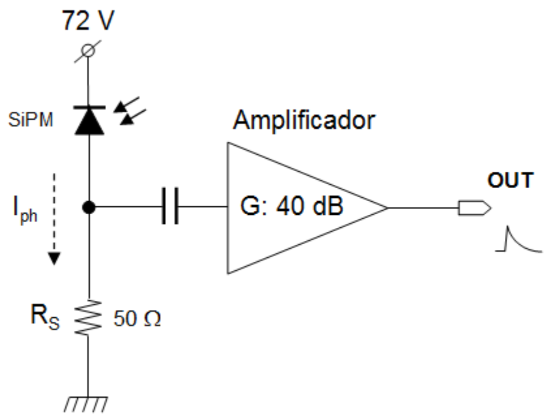
a) Calcule la fotocorriente generada en estas condiciones si la potencia incidente es de 10 nW.

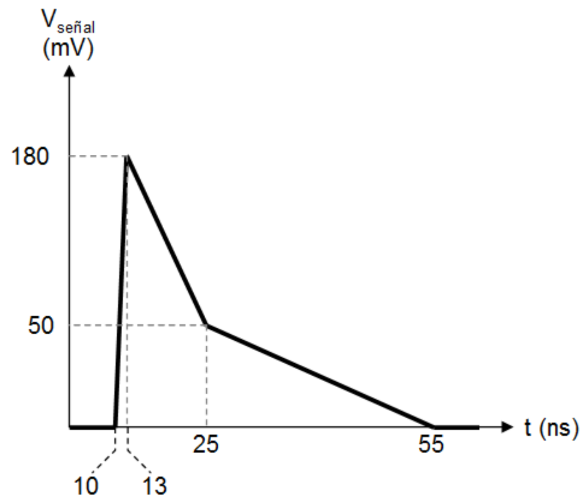
b) Si el APD es polarizado de tal modo que la ganancia es 100, calcule la fotocorriente para la misma potencia óptica incidente.

c) Compare las responsividades que ofrece el APD en ambas situaciones.

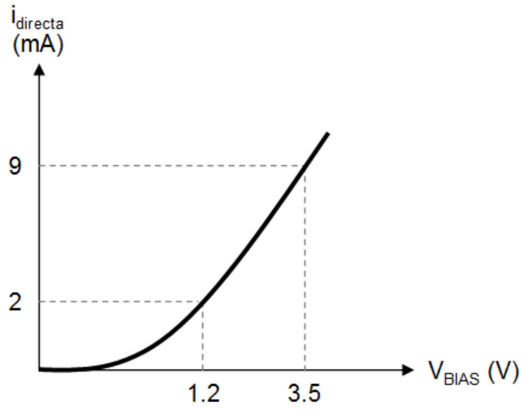
Ejercicio 6 (Circuito equivalente de un SiPM)

Considere el circuito fotorreceptor de la figura, donde el SiPM es una matriz de 20 x 20 píxeles, cada uno de los cuales tiene un área de 50 x 50 μm^2. La señal de fotodetección en OUT tiene la forma idealizada siguiente:





Cuando el SiPM se polariza en directa, ofrece una relación corriente-voltaje como se muestra a continuación. Si la fotoseñal mostrada anteriormente se corresponde con la detección de 3 fotones, determine el circuito equivalente del SiPM durante la fotodetección y también en condiciones de oscuridad, suponiendo que no hay cuentas de oscuridad. Considere que cada fotón se detecta en una celda diferente. Suponga que una variación de 1 V en el voltaje de polarización del SiPM supone una variación de 100 fC en la carga correspondiente a 1 fotoelectrón. Desprecie la capacidad parásita asociada con el resistor de quenching de cada pixel. La capacitancia terminal del SiPM, según datos del fabricante, es de 20 pF.



NOTAS. Desprecie las capacidades parásitas C_{AS} (capacidad entre ánodo y sustrato) y C_{CS} (capacidad entre cátodo y sustrato). Tenga en cuenta que bajo polarización directa el SiPM no actúa como detector, de modo que puede despreciar la rama correspondiente del circuito equivalente. Asuma también que la capacitancia del pixel bajo polarización directa es despreciable. Recuerde las relaciones $i = \frac{dq}{dt}$ y $G(dB) = 20 \cdot \log\left(G(u.n.)\right)$ (donde G(u.n.) es la ganancia en unidades naturales). Para estimar la resistencia intrínseca del pixel tenga en cuenta el tiempo de subida del fotopulso. Asuma que la variación de la fotoseñal puede expresarse como: $v(t) = V_{\max} \cdot \left(1 - \exp(-t/\tau)\right)$ y simplíquela si es posible.

Tabla de constantes

Constante gravitación universal	$G = 6{,}673.10^{-11}\ N.m^2/Kg^2$
Velocidad de la luz en el vacío	$C = 2{,}997924589.10^{8}\ m/s$
Aceleración normal de la gravedad	$g = 9{,}80665\ m/s^2$
Masa de la Tierra	$M_T = 6.10^{24}\ Kg$
Radio medio de la Tierra	$R_T = 6{,}367.10^{6}\ m$
Distancia media Tierra-Sol	$D_{T\text{-}S} = 149{,}6.10^{9}\ m$
Distancia media Tierra-Luna	$D_{T\text{-}L} = 3{,}84.10^{8}\ m$
Velocidad orbital de la Tierra	$\Omega = 1{,}991.10^{-7}\ rad.s^{-1}$
Velocidad de rotación de la Tierra	$\omega = 7{,}292.10^{-5}\ rad.s^{-1}$
Número de Avogadro	$Na = 6{,}023.10^{23}\ mol^{-1}$
Constante de los gases perfectos	$R = 8{,}314\ JK^{-1}mol^{-1}$
Volumen molar normal gas perfecto	$V = 22{,}4140\ l$
Densidad normal del mercurio (Hg)	$\rho = 1{,}35951.10^{4}\ Kg.m^{-3}$
Presión atmosférica normal	$P_o = 1{,}01325.10^{5}\ N.m^{-2}$
Temperatura del punto triple del agua	$T = 273{,}15\ K$
Constante de Boltzman	$K = 1{,}38.10^{-23}\ JK^{-1}$
Constante de Faraday	$F = 96.485{,}3\ C/g.mol$
Constante de Planck	$h = 6{,}626.10^{-34}\ J.s$
Constante de Stefan-Boltzman	$\sigma = 5{,}67032.10^{-8}\ W.m^{-2}.{}^{o}K^{-4}$
Permitividad en el vacío	$\varepsilon_o = 8{,}854187818.10^{-12}\ C^2/N.m^2$
Permeabilidad en el vacío	$\mu_o = 4\pi.10^{-7}\ T.m/A$
Unidad de masa atómica	$uma = 1{,}6605655.10^{-27}\ Kg$
Carga del electrón	$e^- = 1{,}602.10^{-19}\ C$
Masa en reposo del electrón	$m_e = 9{,}109.10^{-31}\ Kg$
Masa en reposo del protón	$m_p = 1{,}672.10^{-27}\ Kg$
Masa en reposo del neutrón	$m_n = 1{,}675.10^{-27}\ Kg$
Magnetón de Bohr	$\mu_B = 9{,}274078.10^{-24}\ J.T^{-1}$
Magnetón nuclear	$\mu_N = 5{,}050824.10^{-27}\ J.T^{-1}$
Momento magnético electrón	$\mu_e = 9{,}284832.10^{-24}\ J.T^{-1}$
Momento magnético del protón	$\mu_p = 1{,}4106171.10^{-26}\ J.T^{-1}$

DESARROLLOS EN SERIE

$$\sum_{n=N}^{M} a^n = \frac{a^N - a^{M+1}}{1-a}$$

$$\sum_{n=n_o}^{\infty} a^n = \frac{a^{n_o}}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{N-k} = \binom{n+m}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = (a+b)^n$$

$$\binom{A}{B} = \frac{A!}{B! \cdot (A-B)!}$$